

Das formale Prinzip für reduzierte komplexe Räume mit einer schwachen Positivitätseigenschaft

Volker Steinbiß

Mathematisches Institut der Universität Göttingen, Bunsenstr. 3–5, D-3400 Göttingen, Bundesrepublik Deutschland

0. Einleitung

Es seien W ein reduzierter komplexer Raum und X ein durch die kohärente Idealgarbe \mathcal{I} gegebener abgeschlossener komplexer Unterraum von W . Die komplexen Räume $X^n := (|X|, \mathcal{O}_W/\mathcal{I}^{n+1}|_{|X|})$, die sogenannten n -ten infinitesimalen Umgebungen von X in W , stimmen als topologische Räume mit $X (= X^0)$ überein, ihre Strukturgarben tragen jedoch für größer werdendes n immer mehr Informationen über die Umgebungsstruktur von X in W . Unter der formalen Umgebung von X in W versteht man den lokal-geringsten Raum $X^\infty := (|X|, \varinjlim \mathcal{O}_W/\mathcal{I}^{n+1}|_{|X|})$. Man sagt nun, es gelte das formale Prinzip, wenn die formale Umgebung bereits die Umgebungsstruktur von X in W festlegt, wenn also gilt: Sind W' und X' wie oben und $\varphi^\infty: X^\infty \rightarrow X'^\infty$ ein formaler Isomorphismus (vgl. 1.6), d. h. eine Familie $(\varphi^n: X^n \rightarrow X'^n)$ biholomorpher Abbildungen, die mit den natürlichen Inklusionen $X^n \hookrightarrow X^m$ und $X'^n \hookrightarrow X'^m (m \geq n)$ kommutieren, so läßt sich φ^∞ zu einem Isomorphismus von Umgebungen von X bzw. X' fortsetzen.

Das formale Prinzip gilt nun nicht immer, wie ein Beispiel von Arnol'd [1] zeigt: Es gibt 2-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeiten W und darin elliptische Kurven X mit topologisch trivialem Normalenbündel N , für die der Umgebungskeim von X in W nicht isomorph zum Umgebungskeim des Nullschnitts O in N ist, obwohl eine formale Äquivalenz $X^\infty \cong O^\infty$ besteht. Man konnte jedoch die Gültigkeit des formalen Prinzips unter gewissen Positivitäts- bzw. Negativitätsbedingungen an das Normalenbündel nachweisen. Für kompakte Untermannigfaltigkeiten mit negativem Normalenbündel zeigte Grauert [11] 1962 die Gültigkeit des formalen Prinzips; hier folgt die Existenz einer Umgebungsäquivalenz schon aus einer hinreichend hohen n -Äquivalenz. Dieses Ergebnis wurde dann von Hironaka u. Rossi [19] und später von Krasnov [25] und Kosarew [24] verallgemeinert. Unter einer relativ starken Positivitätsvoraussetzung bewies Griffiths [14] im glatten Fall bei $\dim X \geq 3$ die Gültigkeit des formalen Prinzips. Ein schärferes Ergebnis erhielt Gieseker [9] in der algebraischen Geometrie unter Verwendung einer Arbeit von Hartshorne [16]. Die allgemeinsten Resultate im positiven Fall stammen aus dem Jahr 1981, und zwar von

Commichau u. Grauert [5], die an das Normalenbündel die (schwache) Forderung der 1-Positivität stellen, sowie von Hirschowitz [20] (siehe unten). Während Commichau und Grauert mit Potenzreihen arbeiten, benutzt Hirschowitz wesentlich den Douadyraum und den Artinschen Approximationssatz. Der Artinsche Approximationssatz (Artin [2]) gewährleistet die lokale Gültigkeit des formalen Prinzips in folgendem Sinne: Ist $\varphi^\infty : X^\infty \rightarrow X'^\infty$ ein formaler Isomorphismus wie oben, so gibt es zu jedem $x \in X$ und zu jedem $n \in \mathbb{N}_0$ eine Umgebung $U(x) \subset W$ und eine darauf definierte biholomorphe Abbildung, die φ^n in $U(x)$ hinein fortsetzt.

Zur Formulierung des Hauptresultats der vorliegenden Arbeit müssen zunächst einige Notationen bereitgestellt werden (die genauen Definitionen folgen in Abschn. 4, zu Raumkeimen siehe 1.2): Ist B ein kompakter komplexer Unterraum von W , so bezeichnet \underline{B} den zugehörigen Punkt im Douadyraum $D(W)$. E ist ein abgeschlossener Unterraum von $D(W)$, der mengentheoretisch genau aus den Punkten \underline{B} besteht, für die B und X nicht-leeren Durchschnitt besitzen. $U_E \hookrightarrow E \times W$ bezeichnet die universelle Familie über E , über einem Punkt $\underline{B} \in E$ liegt also gerade B , und $\Pi_E : U_E \rightarrow W$ wird von der Projektion auf W induziert. Hauptergebnis der oben zitierten Arbeit von Hirschowitz [20] ist das folgende

Theorem. *Seien W eine komplexe Mannigfaltigkeit und X eine kompakte komplexe Untermannigfaltigkeit von W . Ist $\Pi_E : (U_E, \{\underline{X}\} \times X) \rightarrow (W, X)$ eine surjektive Keimabbildung, d. h. ist das Bild jeder Umgebung von $\{\underline{X}\} \times X$ in U_E eine Umgebung von X in W , so gilt für X in W das formale Prinzip.*

Ziel der vorliegenden Arbeit ist der Beweis des Hauptsatzes 5.1, der dieses Resultat im wesentlichen auf den singulären Fall verallgemeinert:

Hauptsatz. *Seien W ein reduzierter komplexer Raum und X ein reduzierter abgeschlossener komplexer Unterraum von W . Zu jedem Punkt $x \in X$ gebe es einen kompakten komplexen Unterraum A von W mit $x \in |A| \subset |X|$, so daß gilt:*

- (1) *Im Raumkeim $(E, \{\underline{A}\})$ gibt es eine dichte Menge M , so daß für alle $\underline{B} \in M$ gilt: B ist reduziert, und jede irreduzible Komponente von B schneidet X .*
 - (2) *$\Pi_E : (U_E, \{\underline{A}, x\}) \rightarrow (W, \{x\})$ ist eine surjektive Keimabbildung, d. h. das Bild jeder Umgebung von $\{\underline{A}, x\}$ in U_E ist eine Umgebung von x in W .*
- Dann gilt für X in W das formale Prinzip.*

Zu den etwas technisch anmutenden Voraussetzungen noch zwei Erläuterungen: Die Bedingung (1) ist z. B. dann erfüllt, wenn A reduziert und irreduzibel ist, und Eigenschaft (2) bedeutet gerade, daß die Vereinigung der Räume aus einer beliebig kleinen Umgebung von A in E eine Umgebung von x in W bildet.

Für den Beweis des Hauptsatzes muß zunächst ein Konvergenzlemma aus [20] auf den singulären Fall verallgemeinert werden. Man kann dann die beiden entscheidenden Beweise [20, 3.7, 4.1] zwar nicht direkt übernehmen, doch auf die obige Situation übertragen. Neben dem Verzicht auf die Glattheit von X und W sowie auf die Kompaktheit von X ergeben sich im Vergleich zu [20] neue Anwendungsmöglichkeiten auch dadurch, daß man anstelle von Deformationen von X Deformationen kompakter komplexer Unterräume A einer infinitesimalen Umgebung X^k betrachten kann. Zum Beispiel kann es auftreten, daß sich eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit X nicht deformieren läßt, wohl aber eine genügend hohe infinitesimale Umgebung – ein Beispiel ist der Nullschnitt in einem

amplen Geradenbündel ohne globale Schnitte – oder echte Unterräume von X , wie im folgenden Fall: Über dem Produkt $X = \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$ mit Projektionen p_1, p_2 betrachte man für $a, b > 0$ das Geradenbündel $L := p_1^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(a)) \otimes_{\mathcal{O}_X} p_2^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(-b))$. Der Nullschnitt X läßt sich zwar nicht in L deformieren, ist aber in geeignete Unterräume $\mathbb{P}_1 \times \{p\}$ gefasert. (L ist übrigens ein im Sinne von [5] 1-positives Geradenbündel, das nicht ample ist.)

Die vorliegende Arbeit ist wie folgt gegliedert: Abschnitt 1 dient der Einführung von Notationen und grundlegenden Definitionen. In Abschn. 2 wird das Konvergenzlemma 2.5 bewiesen, das Hirschowitz' Lemma 3.5 auf den singulären Fall verallgemeinert. Abschnitt 3 erläutert die dem Beweis des Hauptsatzes zugrundeliegenden Ideen. In Abschn. 4 werden die benötigten Modulräume und Definitionen (Douadyraum, E , Fahnenraum etc.) bereitgestellt und die Räume $H(n)$ konstruiert (Satz 4.7). Sie spielen eine zentrale Rolle im Beweis des Hauptsatzes, dessen Durchführung in Abschn. 5 erfolgt.

1. Vorbereitungen

1.1. Notationen. Wir bezeichnen komplexe Räume mit $X = (|X|, \mathcal{O}_X)$ usw.; für die einer holomorphen Abbildung $f = (|f|, \tilde{f})$ zugrundeliegende stetige Abbildung $|f|$ schreiben wir der Einfachheit halber f . Der zu einem Punkt $x \in X$ gehörende reduzierte komplexe Raum wird mit $\{x\}$ bezeichnet. " $A \subset X$ " bedeute stets, daß A ein abgeschlossener komplexer Unterraum von X ist. In Diagrammen kennzeichnen durchgezogene Pfeile holomorphe, d. h. konvergente, und gestrichelte Pfeile formale Abbildungen.

Für $A_1 \subset X, A_2 \subset X$ sei $A_1 \cap A_2$ der analytische Durchschnitt beider Räume. Ist $f: X \rightarrow Y$ eine holomorphe Abbildung und $B \subset Y$ ein Unterraum, so sei $f^{-1}(B)$ das analytische Urbild von B unter f . Ist f eigentlich, dann bezeichne $f(X)$ das Remmert-Bild (vgl. [7, 1.18]): Es wird durch die kohärente Idealgarbe $\mathcal{Ker}(\tilde{f}: \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*(\mathcal{O}_X))$ gegeben und stimmt mengenmäßig mit $f(|X|)$ überein. $f(X)$ ist der kleinste abgeschlossene Unterraum von Y , über den f faktorisiert. – Ist $i: A \subset X$ ein abgeschlossener Unterraum, so schreiben wir statt $(f \circ i)(A)$ kurz $f(A)$.

1.2. Raumkeime. Wir verstehen die Menge der Paare $\langle X, A \rangle$ komplexer Räume, wobei A abgeschlossener komplexer Unterraum von X ist, mit folgender Äquivalenzrelation: Zwei Paare $\langle X, A \rangle$ und $\langle X', A' \rangle$ seien äquivalent, wenn $A = A'$ ist und X und X' in einer Umgebung von A übereinstimmen. Die zu $\langle X, A \rangle$ gehörende Äquivalenzklasse heißt Raumkeim von X längs A und wird mit (X, A) bezeichnet. Entsprechend ist ein Morphismus von Raumkeimen (kurz: eine Keimabbildung) $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ der Keim (längs A) einer holomorphen Abbildung $f: X \rightarrow Y$, deren Einschränkung auf A über B faktorisiert. Zwei holomorphe Abbildungen $f_i: X \rightarrow Y$ induzieren also genau dann dieselbe Keimabbildung, wenn es eine Umgebung U von A in X gibt, in der f_1 und f_2 übereinstimmen. Man beachte, daß jeder komplexe Raum Y vermöge (Y, Y) auch ein Raumkeim ist; insbesondere ist klar, was unter einem Morphismus $(X, A) \rightarrow Y$ zu verstehen ist. Wir sagen, für den Raumkeim (X, A) gelte eine Eigenschaft (*), wenn es eine (beliebig kleine) Umgebung $U(A)$ in X gibt, für die (*) gilt. Wenn über die

betreffenden abgeschlossenen Unterräume kein Zweifel bestehen kann, schreiben wir für eine Keimabbildung $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ manchmal der Übersichtlichkeit halber $f : X \rightarrow Y$.

1.3. Definitionen. Eine holomorphe Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt fast überall injektiv, wenn die Menge $\{x \in X : \text{es gibt eine Umgebung } U(x) \subset X, \text{ so daß } f|_U \text{ injektiv ist}\}$ dicht in X liegt. Eigenschaften wie diese lassen sich auf Keimabbildungen übertragen. Insbesondere heißt eine Keimabbildung $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ eigentlich, wenn es beliebig kleine eigentliche Repräsentanten für f gibt, und surjektiv, wenn $f(|A|) = |B|$ und das Bild einer jeden Umgebung von A in X eine Umgebung von B in Y ist [20].

1.4. Definition. Eine Keimabbildung $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ heißt sub-eigentlich, wenn es für jede Keimabbildung $\gamma : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (Y, B)$ ein kommutatives Diagramm von Keimabbildungen

$$\begin{array}{ccc}
 (\mathbb{C}, 0) & \xrightarrow{\hat{\gamma}} & (X, A) \\
 \downarrow \Pi & & \downarrow f \\
 (\mathbb{C}, 0) & \xrightarrow{\gamma} & (Y, B)
 \end{array}$$

gibt, wobei Π eigentlich (und damit endlich) ist [20].

1.5. Bemerkungen. 1) Die Komposition sub-eigentlicher Keimabbildungen ist sub-eigentlich.

2) Ist $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ sub-eigentlich und $g : (Z, C) \rightarrow (Y, B)$ eine beliebige Keimabbildung, so ist die durch Basiswechsel entstehende Keimabbildung

$$f_Z : (X \times_Y Z, A \times_Y C) \rightarrow (Z, C)$$

ebenfalls sub-eigentlich.

3) Jede surjektive Keimabbildung ist sub-eigentlich [20, Proposition 3.3].

1.6. Formale Abbildungen. Sei (X, A) ein Raumkeim und A in X durch die kohärente Idealgarbe \mathcal{I} gegeben. Dann heißt, für $n \in \mathbb{N}_0$, der komplexe Raum $A^n := (|A|, \mathcal{O}_X / \mathcal{I}^{n+1}|_{|A|})$ die n -te infinitesimale Umgebung von A in X ; A^0 ist also gerade A selbst. Der lokal-geringste Raum $A^\infty := (|A|, \varinjlim \mathcal{O}_X / \mathcal{I}^{n+1}|_{|A|})$ heißt formale Umgebung von A in X [4]. Unter einer formalen Abbildung $f : (X, A) \dashrightarrow (Y, B)$ von Raumkeimen verstehen wir eine Familie $(f^n : A^n \rightarrow B^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ holomorpher Abbildungen, die mit den natürlichen Einbettungen $i_n : A^n \hookrightarrow A^{n+1}$ und $j_n : B^n \hookrightarrow B^{n+1}$ verträglich sind, d. h. für die gilt: $f^{n+1} \circ i_n = j_n \circ f^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Eine formale Abbildung ist also ein Morphismus lokal-geringster Räume $f^\infty : A^\infty \rightarrow B^\infty$, der sich zu einer holomorphen Abbildung $f^0 : A \rightarrow B$ einschränken läßt. Jede Keimabbildung $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ induziert eine formale Abbildung. Eine formale Abbildung heißt konvergent, wenn sie von einer Keimabbildung induziert wird. $f : (X, A) \dashrightarrow (Y, B)$ ist genau dann ein formaler Isomorphismus, wenn alle f^n biholomorph sind oder, anders ausgedrückt, wenn es eine formale Abbildung $g : (Y, B) \dashrightarrow (X, A)$ gibt, so daß $g \circ f$ und $f \circ g$ von id_X bzw. id_Y induziert werden.

Eine Zusammenstellung der in dieser Arbeit verwendeten Modulräume sowie die Definition des Raumes E aus dem Hauptsatz findet man am Anfang von Abschn. 4.

2. Ein Konvergenzlemma

In diesem Abschnitt wird das für den Hauptsatz erforderliche Konvergenzlemma 2.5 bewiesen.

Zunächst benötigen wir folgenden

2.1. Vergleichssatz (Grauert). Seien $\pi: X \rightarrow Y$ eine eigentliche holomorphe Abbildung komplexer Räume, $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_Y$ eine kohärente Idealgarbe und $B \subset Y$ der dadurch gegebene komplexe Unterraum; B sei kompakt. Das analytische Urbild $A := \pi^{-1}(B)$ von B werde durch die Idealgarbe \mathcal{J} gegeben. Ist nun $q \geq 0$ eine ganze Zahl und \mathcal{F} eine kohärente \mathcal{O}_X -Modulgarbe, so gibt es eine Funktion $F: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} F(k) = \infty$, so daß für alle $k \geq 0$ gilt:

$$(*) \quad \mathcal{H}_0(R^q \pi_* (\mathcal{J}^k \cdot \mathcal{F})) \rightarrow R^q \pi_* (\mathcal{F}) \subset \mathcal{J}^{F(k)} \cdot (R^q \pi_* (\mathcal{F})).$$

Dabei sei $R^q \pi_* (\mathcal{J}^k \cdot \mathcal{F}) \rightarrow R^q \pi_* (\mathcal{F})$ die von der Inklusion $\mathcal{J}^k \cdot \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ induzierte Abbildung.

Beweis. Der Grauert'sche Vergleichssatz [10, S. 59, Hauptsatz II] ist ursprünglich für den Fall formuliert, wo B ein (reduzierter) Punkt ist. Das bedeutet aber keine wesentliche Einschränkung: Sei $y \in B$ ein beliebiger Punkt. Nachdem man eine Umgebung von y in Y so in einen \mathbb{C}^n eingebettet hat, daß B (lokal um y) der analytische Durchschnitt von Y mit einem Raum $T := \{t_1 = \dots = t_m = 0\}$ ($m \leq n$) ist, kann man den Beweis des Vergleichssatzes wörtlich aus [23, S. 170f] übernehmen. Die so erhaltene Inklusion (*) für Halme überträgt sich aufgrund der \mathcal{O}_Y -Kohärenz der betrachteten Garben (Bildgarbensatz) auf Umgebungen. Die globale Aussage folgt aus der Kompaktheit von B .

2.2. Korollar. Seien $\pi: X \rightarrow Y$ eigentlich und holomorph, $\tilde{\pi}: \mathcal{O}_Y \rightarrow \pi_*(\mathcal{O}_X)$ injektiv, $B \subset Y$ ein kompakter Unterraum und A das analytische Urbild von B unter π . Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ und eine Funktion $F: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} F(k) = \infty$, so daß für alle $n \geq n_0$ gilt:

$$B^{F(n)} \subset \pi(A^n) \subset B^n.$$

Beweis. Die rechte Inklusion folgt sofort aus den Eigenschaften des analytischen Urbilds bzw. des Remmert-Bildes: Für jede holomorphe Abbildung π gilt $\pi^{-1}(B^n) = (\pi^{-1}(B))^n$ und für jede eigentliche holomorphe Abbildung $\pi(\pi^{-1}(B)) \subset B$. Seien $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_Y$ bzw. $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_X$ die Idealgarben von B bzw. A ; die Idealgarbe von $\pi(A^{n-1})$ ist dann $\tilde{\pi}^{-1}(\pi_*(\mathcal{J}^n))$. Zum Beweis der linken Inklusion ist die Existenz einer Funktion F mit $\lim_{k \rightarrow \infty} F(k) = \infty$ und

$$(\pi_*(\mathcal{J}^n) \cap \mathcal{O}_X) \subset \mathcal{I}^{F(n)} \quad \text{für hinreichend große } n$$

zu zeigen; dabei wird \mathcal{O}_Y vermöge $\tilde{\pi}$ als in $\pi_*(\mathcal{O}_X)$ liegend aufgefaßt. Der Vergleichssatz 2.1 liefert eine monoton wachsende und unbeschränkte Funktion

F_1 mit

$$\pi_*(\mathcal{I}^n) \subset \mathcal{I}^{F_1(n)} \cdot \pi_*(\mathcal{O}_X) \quad \text{für alle } n \geq 1,$$

somit

$$\pi_*(\mathcal{I}^n) \cap \mathcal{O}_Y \subset \mathcal{I}^{F_1(n)} \cdot \pi_*(\mathcal{O}_X) \cap \mathcal{O}_Y.$$

Die Existenz einer Funktion $F_2: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} F_2(k) = \infty$ und

$$\mathcal{I}^n \cdot \pi_*(\mathcal{O}_X) \cap \mathcal{O}_Y \subset \mathcal{I}^{F_2(n)} \quad \text{für hinreichend große } n$$

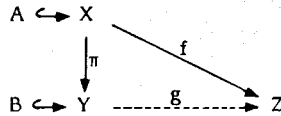
folgt aus dem Lemma von Artin-Rees [2, Corollary 10.10] zunächst für Halme und sodann wie in 2.1 global. $F = F_2 \circ F_1$ leistet das Gewünschte.

2.3. *Bemerkungen.* 1) Ist B zusätzlich reduziert, so gilt $B = \pi(A)$. Man kann also $n_0 = 0$ wählen.

2) Auf die Injektivität von $\tilde{\pi}$ kann man nicht verzichten, wie schon einfache Beispiele zeigen.

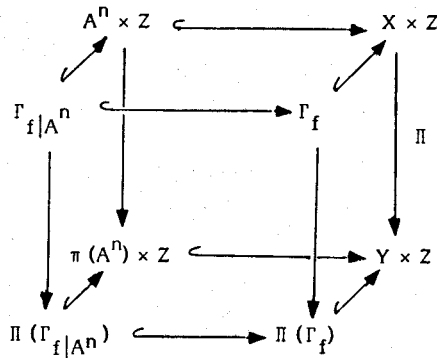
3) Injektivität von $\tilde{\pi}$ ist (für eigentliches π) gleichbedeutend mit $\pi(X) = Y$. Für reduziertes Y gilt dies schon, wenn die der holomorphen Abbildung π zugrundeliegende stetige Abbildung $|\pi|$ surjektiv ist.

2.4. **Lemma.** Seien $f: X \rightarrow Z$ und $\pi: X \rightarrow Y$ holomorphe Abbildungen komplexer Räume, π eigentlich und $\tilde{\pi}$ injektiv, und sei $B \subset Y$ ein kompakter Unterraum mit analytischem Urbild $A := \pi^{-1}(B)$. Dann gilt: Ist



ein kommutatives Diagramm formaler Abbildungen längs der angegebenen Unterräume, so konvergiert g in einer Umgebung von B in Y .

Beweis. Die Idee ist, das Bild des Graphen von f unter der eigentlichen Abbildung $\pi \times \text{id}_Z$ zu betrachten: Man erhält so den Graphen einer holomorphen Abbildung, die g induziert. Wir kürzen $\pi \times \text{id}_Z: X \times Z \rightarrow Y \times Z$ mit Π ab und bezeichnen mit $\Gamma_f = X \times_Z Z \subset X \times Z$ den Graphen von f , entsprechend die Graphen anderer holomorpher Abbildungen. Sei $n \geq 0$ beliebig. In folgendem würfelförmigen kommutativen Diagramm



ist die Oberseite kartesisch, was gerade bedeutet, daß sich die zum linken Graphen gehörende Abbildung durch Einschränkung der zum rechten gehörenden ergibt. Nun erhält das Remmert-Bild zwar abgeschlossene Einbettungen, aber nicht unbedingt analytische Durchschnitte, dennoch läßt sich zeigen, daß die Diagrammunterseite kartesisch ist:

Zunächst gilt wegen $\pi(A^n) \hookrightarrow B^n$ und der Kommutativität von (*) $\Pi(\Gamma_f|_{A^n}) = \Gamma_g|_{\pi(A^n)}$; darum ist die Einschränkung der Projektion $\text{pr}_{\pi(A^n)}: \pi(A^n) \times Z \rightarrow \pi(A^n)$ auf $\Pi(\Gamma_f|_{A^n})$ ein Isomorphismus. Da ferner das untere Teildiagramm von

$$\begin{array}{ccc}
 \Gamma_g|_{\pi(A^n)} = \Pi(\Gamma_f|_{A^n}) & \xleftarrow{\quad} & \Pi(\Gamma_f) \\
 \downarrow i & & \downarrow \\
 \pi(A^n) \times Z & \xleftarrow{\quad} & Y \times Z \\
 \downarrow \text{pr}_{\pi(A^n)} & & \downarrow \\
 \pi(A^n) & \xleftarrow{\quad} & Y
 \end{array}$$

kartesisch und $i: \Pi(\Gamma_f|_{A^n}) \hookrightarrow \pi(A^n) \times Z$ ein Monomorphismus ist, folgt sofort, daß das obere Teildiagramm kartesisch ist. Da $n \geq 0$ beliebig war, gilt aufgrund von **Korollar 2.2**

(**) $(B^n \times Z) \cap \Pi(\Gamma_f) = \Gamma_g|_{B^n}$ für alle $n \geq 0$.

Wir schreiben jetzt kurz Γ für $\Pi(\Gamma_f)$. Bezeichnet man mit p die Einschränkung von $\text{pr}_Y: Y \times Z \rightarrow Y$ auf Γ , so ist für alle n

$$p|_{\Gamma \cap (B^n \times Z)}: \Gamma \cap (B^n \times Z) \rightarrow B^n$$

ein Isomorphismus, p selbst ist also ein Isomorphismus auf einer Umgebung der Menge $\Gamma \cap (B \times Z)$. Die holomorphe Abbildung $\text{pr}_Z \circ p^{-1}$, definiert über einer Umgebung von B in Y , induziert wegen (**) die formale Abbildung g .

2.5. Lemma. Sei

$$\begin{array}{ccc}
 A \hookrightarrow X & & \\
 \downarrow p & \searrow f & \\
 B \hookrightarrow Y & \xrightarrow{g} & Z
 \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm formaler Abbildungen längs der angegebenen Unterräume, p and f seien konvergent. Außerdem seien p sub-eigentlich, Y reduziert und B kompakt. Dann konvergiert g in der Nähe von B .

Beweis. Zunächst soll gezeigt werden, daß die Einschränkung von g auf jeden beliebigen Kurvenkeim (längs B) konvergiert. Sei $\gamma: (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (Y, B)$ ein solcher Kurvenkeim. Da p sub-eigentlich ist, existiert ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 (\mathbb{C}, 0) & \xrightarrow{\hat{\gamma}} & (X, A) \\
 \downarrow q & & \downarrow p \\
 (\mathbb{C}, 0) & \xrightarrow{\gamma} & (Y, B)
 \end{array}$$

von Morphismen zwischen komplexen Raumkeimen, wobei q endlich ist; nach geeigneter Koordinatenwahl ist also $q(z) = z^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Da aus der Konvergenz einer Potenzreihe $\sum_{v=0}^{\infty} a_v z^v$ die Konvergenz von $\sum_{v=0}^{\infty} a_v z^v$ folgt, konvergiert mit $f \circ \hat{\gamma} = g \circ \gamma \circ q$ auch $g \circ \gamma$.

Nach Hironaka [17, Desingularisation Theorem (7.1)] gibt es eine Mannigfaltigkeit \tilde{Y} und eine eigentliche, surjektive holomorphe Abbildung $f: \tilde{Y} \rightarrow Y$. Wir erhalten damit folgendes kommutative Diagramm formaler Abbildungen:

$$\begin{array}{ccccc} \pi^{-1}(B) & =: & \tilde{B} & \hookrightarrow & \tilde{Y} \\ & & & & \downarrow \pi \\ B & \hookrightarrow & Y & \xrightarrow{g} & Z \end{array} \quad \begin{array}{l} \nearrow \tilde{g} := g \circ \pi \\ \dashrightarrow g \end{array}$$

Sei nun $\tilde{\gamma}: (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\tilde{Y}, \tilde{B})$ der Keim einer beliebigen glatten Kurve. Ist $\tilde{\gamma}((\mathbb{C}, 0))$ nicht in \tilde{B} enthalten (im anderen Fall ist nichts zu zeigen), so ist das Bild unter der eigentlichen Keimabbildung $\pi: (\tilde{Y}, \tilde{B}) \rightarrow (Y, B)$ ein Kurvenkeim. Da g auf $\pi(\tilde{\gamma}((\mathbb{C}, 0)))$ konvergiert, konvergiert \tilde{g} auf $\tilde{\gamma}((\mathbb{C}, 0))$. Nach einem Kriterium von Hartogs ([15], vgl. auch [27]) konvergiert darum \tilde{g} nahe \tilde{B} , und aus Lemma 2.4 folgt schließlich die Konvergenz von g .

2.6. Bemerkung. Die voranstehenden Sätze lassen sich auf naheliegende Weise auch für Raumkeime formulieren. Beim Beweis von 2.5 reicht dann die lokale Desingularisierung.

3. Die Idee des Hauptsatzes

Der folgende Abschnitt soll dazu dienen, die grundlegenden Ideen beim Beweis des Hauptsatzes herauszuarbeiten.

Seien zwei reduzierte komplexe Räume W_1 und W_2 mit reduzierten abgeschlossenen Unterräumen X_1 bzw. X_2 gegeben, und sei φ ein Isomorphismus formaler Umgebungen von X_1 und X_2 . Für $X_1 \subset W_1$ gelte: Durch jeden Punkt $x \in X_1$ gibt es einen (der Einfachheit halber:) reduzierten und irreduziblen kompakten komplexen Raum $A_1 \subset X_1$, so daß diejenigen „Nachbarn“ von A_1 , die X_1 schneiden, eine ganze Umgebung von x in W_1 ausfüllen. Genauer: Bezeichnen wir mit E_1 im Douadyraum $D(W_1)$ die analytische Menge der Räume, die X_1 schneiden, so soll die Vereinigung der Räume aus einer beliebig kleinen Umgebung von A_1 in E_1 eine Umgebung von x in W_1 bilden. (Mit A_1 wird derjenige Punkt im Douadyraum bezeichnet, der zum kompakten komplexen Raum A_1 gehört.)

Unter den eben aufgeführten Voraussetzungen soll die Konvergenz von φ gezeigt werden. Wir brauchen die Konvergenz nur lokal nachzuweisen, etwa in $x \in X_1$, und wählen dazu einen kompakten komplexen Raum $A_1 \subset X_1$ wie oben (und damit $A_2 := \varphi(A_1) \subset X_2$). Die Einschränkung von φ auf die infinitesimalen Umgebungen von A_1 in W_1 bzw. A_2 in W_2 induziert einen Isomorphismus zwischen den infinitesimalen Umgebungen der Punkte A_i in E_i , der (letztlich) dank des Artinschen Approximationsatzes [2] konvergiert. Nach diesem ersten

Konvergenzschrift besteht also eine bijektive Korrespondenz zwischen gewissen kompakten Unterräumen von W_1 und W_2 . Es ist jedoch nur klar, welche Räume einander zugeordnet werden, nicht, wie die biholomorphen Abbildungen dazwischen aussehen. Das wird im zweiten Schritt ermittelt.

Seien also B_1, B_2 kompakte komplexe Unterräume von W_1 bzw. W_2 , die einander zugeordnet sind. Zunächst existieren für beliebiges n natürliche Isomorphismen $B_1 \cap X_1^n \xrightarrow{\cong} B_2 \cap X_2^n$, die sich aus der Einschränkung von $\varphi|_{X_1^n}: X_1^n \xrightarrow{\cong} X_2^n$ ergeben. Sie lassen sich – wiederum eine Konsequenz aus dem Artinschen Approximationssatz, der hier auf einen Raum von Isomorphismen angewendet wird – zu Isomorphismen $B_1 \xrightarrow{\cong} B_2$ fortsetzen. Die Eindeutigkeit dieser Fortsetzungen ergibt sich daraus, daß man einen Isomorphismus $B_1 \xrightarrow{\cong} B_2$ schon durch seine Einschränkung auf ein hinreichend hohes $B_1 \cap X_1^n$ kennt. So ist etwa ein Automorphismus von \mathbb{P}_1 bereits durch seine Einschränkung auf die 2-te infinitesimale Umgebung eines Punktes festgelegt.

Im dritten Konvergenzschrift wird gezeigt, daß sich die auf den Räumen B_1 (mit B_1 nahe A_1) erhaltenen Isomorphismen zu einem Isomorphismus auf einer Umgebung von x in W_1 zusammensetzen.

Soweit die Grundidee. In der praktischen Durchführung des Beweises konstruiert man für ein großes n zunächst einen Raum $H_1(n) \hookrightarrow D(X_1^n) \times D(W_1)$. $H_1(n)$ ist (im wesentlichen) eine eigentliche Modifikation von E_1 und stimmt auf einer dichten Teilmenge mit dem Graphen der Abbildung von E_1 in $D(X_1^n)$ überein, die einem Punkt bzw. Raum B seinen analytischen Durchschnitt mit X_1^n zuordnet. Für $H_1(n)$ kann man drei wichtige Eigenschaften nachweisen (vgl. Satz 4.7); außerdem beweist man drei Konvergenzlemmata. Nun lassen sich die oben skizzierten Konvergenzschrift in leicht abgewandelter Form durchführen, und zwar nutzt man für jeden der drei Schritte genau eins der Konvergenzlemmata und eine der Eigenschaften von $H_1(n)$ aus:

Man zeigt zunächst (1. Schritt) die Konvergenz der von φ induzierten Abbildung längs des Urbilds von A_1 in $H_1(n)$ (anstelle von „ A_1 in E_1 “), sodann im 2. Schritt Konvergenz für die den Punkten entsprechenden kompakten komplexen Räume (genauer: für die universelle Familie $U_{H_1(n)}$) und schließlich (3. Schritt) die Konvergenz von φ längs x .

Die ersten beiden der drei Konvergenzlemmata basieren auf dem Artinschen Approximationssatz [2] und können direkt aus Hirschowitz' Arbeit übernommen werden [20, Lemmata 2.2 und 2.4]. Das dritte Konvergenzlemma [20, Lemma 3.5] wird in Abschn. 2 dieser Arbeit auf den singulären Fall verallgemeinert (Lemma 2.5).

4. Die Konstruktion der $H(n)$

Zunächst sollen die in der vorliegenden Arbeit verwendeten Modulräume bereitgestellt werden.

4.1. *Der Douadyraum $D(X)$* [6]. Sei X ein beliebiger komplexer Raum. Dann gibt es einen komplexen Raum $D(X)$ und einen abgeschlossenen komplexen Unterraum $U \hookrightarrow D(X) \times X$, der platt und eigentlich über $D(X)$ liegt, so daß folgende universelle Eigenschaft erfüllt ist: Zu jedem komplexen Raum S und

jedem über S eigentlichen und platten komplexen Raum $Y \subset S \times X$ gibt es genau eine holomorphe Abbildung $f: S \rightarrow D(X)$, so daß $Y = (f \times \text{id}_X)^{-1}(U)$ gilt. Insbesondere entsprechen also die Punkte von $D(X)$ genau den kompakten komplexen Unterräumen von X , und über einem solchen Punkt liegt in der universellen Familie der ihm zugeordnete Unterraum. $D(X)$ und U sind durch die universelle Eigenschaft bis auf kanonische Isomorphie eindeutig bestimmt. Man nennt $D(X)$ den Douadyraum von X und U die zugehörige universelle Familie.

Ist $A \subset X$ ein kompakter komplexer Unterraum, so wird der ihm zugeordnete Punkt im Douadyraum mit \underline{A} bezeichnet.

4.2. Der Unterraum E von $D(W)$. Sei nun X ein abgeschlossener komplexer Unterraum eines komplexen Raumes W . Wir bezeichnen die beiden kanonischen Projektionen der universellen Familie $U \subset D(W) \times W$ mit $p: U \rightarrow W$ und $q: U \rightarrow D(W)$; q ist eigentlich und platt. $E := q(p^{-1}(X))$ ist ein abgeschlossener Unterraum von $D(W)$ und besteht mengenmäßig genau aus den Punkten \underline{A} , für die A nicht-leeren Durchschnitt mit X hat.

4.3. Der Fahnenraum $F(A, B)$. Sei X ein komplexer Raum mit abgeschlossenen Unterräumen A und B . Der Fahnenraum $F(A, B)$ ist ein abgeschlossener Unterraum von $D(A) \times D(B)$, versehen mit zwei (von den universellen Familien über $D(A)$ bzw. $D(B)$ induzierten) universellen Familien U' bzw. U in $F(A, B) \times X$, es gilt $U' \subset U$. Er parametrisiert Paare (A^*, B^*) kompakter komplexer Unterräume $A^* \subset A$ und $B^* \subset B$ mit $A^* \subset B^*$. Genauer gilt folgende universelle Eigenschaft: Zu jedem komplexen Raum S und zu jedem Paar (Y', Y) platt und eigentlich über S liegender komplexer Räume $Y' \subset S \times A$ und $Y \subset S \times B$ mit $Y' \subset Y \subset S \times X$ gibt es eine eindeutig bestimmte holomorphe Abbildung $f: S \rightarrow F(A, B)$, so daß $Y' = (f \times \text{id}_X)^{-1}(U')$ und $Y = (f \times \text{id}_X)^{-1}(U)$ gelten. – Zur Konstruktion siehe [20, 5.4].

4.4. Die Räume $\text{Aut}_S X$ und $\text{Aut}_S(X, X')$. Ist $X \rightarrow S$ ein komplexer Raum über S und $g: T \rightarrow S$ eine holomorphe Abbildung, so bezeichne $X_{(T)} := X \times_S T$ den durch Basiswechsel mit g entstandenen Raum. – Sei $X \rightarrow S$ ein eigentlicher, platter komplexer Raum über S . Dann existieren ([26]) ein komplexer Raum $\text{Aut}_S X$ über S sowie ein $\text{Aut}_S X$ -Automorphismus $X_{(\text{Aut}_S X)} \xrightarrow{\sim} X_{(\text{Aut}_S X)}$ – d. h. ein Automorphismus, der das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X_{(\text{Aut}_S X)} & \xrightarrow{\sim} & X_{(\text{Aut}_S X)} \\ & \searrow & \swarrow \\ & \text{Aut}_S X & \end{array}$$

kommutativ macht –, so daß gilt: Für jede holomorphe Abbildung $T \rightarrow S$ und jeden T -Automorphismus $X_{(T)} \xrightarrow{\sim} X_{(T)}$ gibt es genau einen S -Morphismus $f: T \rightarrow \text{Aut}_S X$, so daß $X_{(T)} \xrightarrow{\sim} X_{(T)}$ aus $X_{(\text{Aut}_S X)} \xrightarrow{\sim} X_{(\text{Aut}_S X)}$ durch Basiswechsel mit f entsteht. Die Punkte von $\text{Aut}_S X$ sind also Paare (s, φ) , wobei $s \in S$ und $\varphi: X_{(s)} \xrightarrow{\sim} X_{(s)}$ ein Automorphismus der Faser von X über s ist.

Ist neben X ein weiterer komplexer Raum $X' \subset X$ gegeben, der platt und eigentlich über S liegt, so definiert man analog zu $\text{Aut}_S X$ $\text{Aut}_S(X, X')$ als den Raum

derjenigen S -Automorphismen von X , die auf X' die Identität induzieren. $\text{Aut}_S(X, X')$ liegt als abgeschlossener Unterraum in $\text{Aut}_S X$; vgl. [20, Proposition 5.3].

Im absoluten Fall (S ist ein reduzierter Punkt) schreibt man entsprechend $\text{Aut}(X)$ und $\text{Aut}(X, X')$.

4.5. Hilfssatz. *Seien X ein reduzierter kompakter komplexer Raum und A ein abgeschlossener komplexer Unterraum, der jede irreduzible Komponente von X schneidet. Dann gibt es eine natürliche Zahl n_0 , so daß für alle $n \geq n_0$ die Identität id_X ein isolierter Punkt in $\text{Aut}(X, A^n)$ ist.*

Beweis. Die $\text{Aut}(X, A^n)$ bilden eine absteigende Kette abgeschlossener Unterräume in $\text{Aut}(X)$, als Kette von Raumkeimen um $\text{id}_X \in \text{Aut}(X)$ wird sie stationär. Da auf reduzierten irreduziblen komplexen Räumen ein Identitätssatz für holomorphe Abbildungen gilt [21, Proposition 49.11], ist der Durchschnitt aller $\text{Aut}(X, A^n)$ die Identität id_X . Für hinreichend großes n ist id_X also ein isolierter Punkt in $\text{Aut}(X, A^n)$.

4.6. Sei X ein abgeschlossener komplexer Unterraum von W und $n \in \mathbb{N}_0$. Im folgenden werden wir mit U die universelle Familie in $D(W) \times W$ und mit U' die universelle Familie in $D(X^n) \times X^n$ bezeichnen. Gestattet ein Raum Y eine natürliche Abbildung in $D(W)$ bzw. $D(X^n)$, so bezeichnen wir mit U_Y bzw. U'_Y die entsprechenden auf Y zurückgeholten universellen Familien. Zum Beispiel besitzt $F(X^n, W)$ zwei kanonische Projektionen $\text{pr}_1: F(X^n, W) \rightarrow D(X^n)$ bzw. $\text{pr}_2: F(X^n, W) \rightarrow D(W)$ auf die erste bzw. zweite Komponente. Die beiden universellen Familien über dem Faserraum sind gerade $U_{F(X^n, W)}$ und $U'_{F(X^n, W)}$, und es gilt $U'_{F(X^n, W)} \hookrightarrow U_{F(X^n, W)}$.

Der nächste Satz ist für den Beweis des Hauptsatzes von zentraler Bedeutung: Die drei postulierten Eigenschaften des Raumes $H(n) \hookrightarrow D(X^n) \times D(W)$ ermöglichen die Durchführung der bereits im vorigen Kapitel erläuterten drei Konvergenzschritte.

Zur Definition von „fast überall injektiv“ und „sub-eigentlich“ s. 1.3 und 1.4.

4.7. Satz. *Seien W ein reduzierter komplexer Raum, X ein reduzierter abgeschlossener komplexer Unterraum von W und A ein kompakter Unterraum von X^k . Sei E wie in 4.2 definiert. Im Raumkeim $(E, \{A\})$ gebe es eine dichte Teilmenge M , so daß für alle $B \in M$ gilt: B ist reduziert, und jede irreduzible Komponente von B schneidet X . Dann existiert für hinreichend großes $n \in \mathbb{N}$ eine analytische Teilmenge $H(n)$ des Raumkeims $(F(X^n, W), \text{pr}_2^{-1}(\{A\}))$ mit folgenden Eigenschaften:*

(1) *Die natürliche Projektion $\text{pr}_1: (H(n), \text{pr}_2^{-1}(\{A\})) \rightarrow D(X^n)$ ist fast überall injektiv.*

(2) *Der Identitätsschnitt in $\text{Aut}_{H(n)}(U_{H(n)}, U'_{H(n)})$ ist eine Vereinigung irreduzibler Komponenten von $\text{Aut}_{H(n)}(U_{H(n)}, U'_{H(n)})$.*

(3) *Die natürliche Projektion $\text{pr}_2: (H(n), \text{pr}_2^{-1}(\{A\})) \rightarrow (E, \{A\})$ ist sub-eigentlich.*

Beweis. Wir ersetzen E und $F(X^n, W)$ durch ihre Reduktionen. Für den Raumkeim $(E, \{A\})$ schreiben wir kurz E ; Unterräume von $D(X^n) \times E$ sind entsprechend als Raumkeime längs der Faser $\text{pr}_2^{-1}(\{A\})$ aufzufassen.

Sei E' eine irreduzible Komponente von E . Die (natürliche) eigentliche holomorphe Abbildung $U_{E'} \cap (E' \times X^n) \rightarrow E'$ ist über einer offenen dichten Teilmenge E'_n von E' platt (generische Platteit, [8, 22]) und induziert daher eine holomorphe Abbildung $\varphi_n: E'_n \rightarrow D(X^n)$ mit $\varphi_n(B) = B \cap X^n$. Sei \underline{B}_0 ein Punkt aus der in E' dichten Menge $M \cap \left(\bigcap_{n \geq 0} E'_n\right)$. Die analytischen Mengenkeime (nun um \underline{B}_0) $\varphi_n^{-1} \varphi_n(\underline{B}_0) = \{B \in E: B \cap X^n = \underline{B}_0 \cap X^n\}$ bilden eine absteigende Kette, die für $n \geq n_0$ stationär wird. Es sei $Z := \varphi_{n_0}^{-1} \varphi_{n_0}(\underline{B}_0)$; wegen $\underline{B}_0 \in M$ gilt $Z \subset M$ nahe \underline{B}_0 . Wie eben gibt es offene dichte Teilmengen $Z_n \subset Z$, so daß $U_Z \cap (Z \times X^n) \rightarrow Z$ platt über Z_n ist, und deshalb holomorphe Abbildungen $\Psi_n: Z_n \rightarrow D(X^n)$ mit $\Psi_n(B) = B \cap X^n$. Sei \underline{B} ein beliebiger Punkt aus $M \cap \left(\bigcap_{n \geq 0} Z_n\right)$. Aus $\Psi_n(\underline{B}) = \Psi_n(\underline{B}_0)$ bzw. $B \cap X^n = \underline{B}_0 \cap X^n$ für alle n folgt die Gleichung $B = \underline{B}_0$ zunächst in einer Umgebung von X in W und sodann, da B und \underline{B}_0 reduziert sind und jede irreduzible Komponente X schneidet, auch global. Also ist $Z = \{\underline{B}_0\}$, d. h. \underline{B}_0 ist ein isolierter Punkt der Faser von φ_n über $\varphi_n(\underline{B}_0)$. Nach einem Resultat von Cartan und Remmert [7, 3.6] gilt dies dann auch für Punkte aus einer dichten offenen Teilmenge von E'_n . Dort ist also die Jacobiabbildung der Tangentialräume injektiv, d. h. φ_n eine Immersion. Insbesondere gilt für $n \geq n_0$:

$$(1) \quad \varphi_n: E'_n \rightarrow D(X^n) \text{ ist fast überall injektiv.}$$

Für $B_0 \cap X \hookrightarrow B_0$ wählen wir nun ein (beliebig großes) n nach Hilfssatz 4.5 und betrachten den Raumkeim von $\text{Aut}_{E'_n}(U_{E'_n}, (E'_n \times X^n) \cap U_{E'_n})$ längs $\text{id}_{U_{\underline{B}_0}}$. Nach Wahl von n ist $\text{id}_{U_{\underline{B}_0}}$ isoliert in der Faser über \underline{B}_0 , d. h. in

$$(\text{Aut}_{E'_n}(U_{E'_n}, (E'_n \times X^n) \cap U_{E'_n}))_{\underline{B}_0} \cong \text{Aut}(B_0, X^n \cap B_0);$$

deshalb gilt aus Dimensionsgründen:

$$(2) \quad \text{Der Identitätsschnitt ist eine irreduzible Komponente von}$$

$$\text{Aut}_{E'_n}(U_{E'_n}, (E'_n \times X^n) \cap U_{E'_n}).$$

Wir wählen n jetzt so groß, daß für jede irreduzible Komponente E' von E (1) und (2) gelten.

Der weitere Beweisgang kann nun direkt aus [20, 3.6, 3.7] übernommen werden. x_0 entspricht unserem \underline{B}_0 und G_n unserem $F(X^n, W)$. – Wir fassen diese restlichen Beweisschritte noch zusammen:

Zunächst wird gezeigt, daß $F(X^n, W)$ und der Graph von φ_n in einer Umgebung eines Punktes $(B \cap X^n, B)$ übereinstimmen. Bezeichnet man mit Γ diejenige irreduzible Komponente von $F(X^n, W)$, die den Graphen von φ_n umfaßt, so erfüllt Γ , das ja über E'_n mit dem Graphen übereinstimmt, wegen (1) und (2) die Bedingungen (1) und (2). Nun wird mit Hironakas Flattening Theorem [18] ein Unterraum von $D(X^n) \times E'$ konstruiert, der eigentlich über E' liegt und Γ als abgeschlossenen Unterraum enthält. $\Gamma \rightarrow E'$ ist also eigentlich und (da das Bild von Γ die dichte Teilmenge E'_n umfaßt) surjektiv, also eine eigentliche Modifikation. – Man definiert nun (wahlweise) $H(n)$ als die Vereinigung derjenigen irreduziblen Komponenten Γ von $F(X^n, W)$, die (wie oben) den einzelnen irreduziblen Komponenten E' von E zugeordnet sind, oder – wie in [20] – als die Vereinigung

derjenigen irreduziblen Komponenten Γ von $F(X^n, W)$, die die Bedingungen (1) und (2) erfüllen (d. h. eine Obermenge davon). Dann gelten für $H(n)$ die Eigenschaften (1)–(3).

5. Der Beweis des Hauptsatzes

Zur Definition von E und U_E siehe 4.2 bzw. 4.6.

5.1. Hauptsatz. *Seien W ein reduzierter komplexer Raum und $X \hookrightarrow W$ ein reduzierter abgeschlossener komplexer Unterraum. Zu jedem Punkt $x \in X$ gebe es einen kompakten komplexen Unterraum A von W mit $x \in |A| \subset |X|$, so daß gilt:*

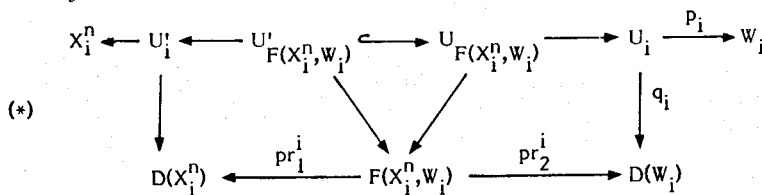
(1) *Im Raumkeim $(E, \{A\})$ gibt es eine dichte Menge M , so daß für alle $B \in M$ gilt: B ist reduziert, und jede irreduzible Komponente von B schneidet X .*

(2) *$\Pi_E: (U_E, \{(A, x)\}) \rightarrow (W, \{x\})$ ist eine surjektive Keimabbildung, d. h. das Bild jeder Umgebung von $\{(A, x)\}$ in U_E ist eine Umgebung von x in W .*

Dann gilt für $X \hookrightarrow W$ das formale Prinzip.

Beweis. Sei $\varphi: (W_1, X_1) \dashrightarrow (W_2, X_2)$ ein formaler Isomorphismus. Die Konvergenz von φ längs X_1 ist nur lokal nachzuweisen. Dazu sei $x \in X_1$ beliebig. Wir wählen einen kompakten Raum A_1 wie in der Voraussetzung. Aufgrund des Rückertschen Nullstellensatzes gilt $A_1 \hookrightarrow X_1^k$ für ein k . Sei $A_2 := \varphi(A_1)$. Ferner sei $n \geq k$ so groß (und für die Zukunft fest) gewählt, daß die Aussage von Satz 4.7 erfüllt ist.

Diagrammaufbau. Für $i = 1, 2$ betrachten wir die kommutativen Diagramme



Links sieht man X_i^n mit seinem Douadyraum und der universellen Familie $U'_i \hookrightarrow D(X_i^n) \times X_i^n$ sowie den zugehörigen Projektionen; rechts das Entsprechende mit W_i statt X_i^n . Der Fahnenraum $F(X_i^n, W_i) \hookrightarrow D(X_i^n) \times D(W_i)$ gestattet zwei kanonische Projektionen pr_1^i und pr_2^i . Die universellen Familien über dem Fahnenraum entstehen durch Zurückholen von U'_i bzw. U_i , und alle nach unten gerichteten Abbildungen sind eigentlich und platt.

Da im folgenden oft lokal gearbeitet werden muß, ersetzen wir $D(W_i)$ durch den Raumkeim $(D(W_i), \{A_i\})$ und die Räume $F(X_i^n, W_i)$, $U'_{F(X_i^n, W_i)}$, $U_{F(X_i^n, W_i)}$ und U_i durch die Keime längs der jeweiligen analytischen Urbilder von $\{A_i\}$, schreiben aber meist der Einfachheit halber weiter $D(W_i)$ usw.

Die beiden Diagramme (*) (für $i = 1$ und 2) werden durch folgende, unten erläuterte, holomorphe bzw. formale Abbildungen verbunden, die das entstehende große Diagramm kommutativ machen:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \varphi^n, & \varphi_{U'}, & \varphi_{U'_{F(X^n, W)}}, & \varphi_{U_{F(X^n, W)}}, & \varphi_{U'}, & \varphi, & \\
 & \varphi_{D(X^n)}, & \varphi_{F(X^n, W)}, & \varphi_{D(W)}. & & &
 \end{array}$$

Die holomorphen Abbildungen sind $\varphi^n: X_1^n \xrightarrow{\sim} X_2^n$, $\varphi_{D(X^n)}: D(X_1^n) \xrightarrow{\sim} D(X_2^n)$ und $\varphi_U: U_1 \xrightarrow{\sim} U_2$; sie werden durch die Einschränkung von φ auf X_1^n induziert. Alle anderen Abbildungen sind formal, und zwar längs der entsprechenden Unterräume. Sie werden auf den infinitesimalen Umgebungen wie folgt erklärt: Für festes $p \geq n$ sind die Diagramme (*) mit X_i^p statt W_i durch (von φ^p induzierte) Isomorphismen verbunden, die alles kommutativ machen; für verschiedene p sind alle Abbildungen in geeigneter Weise miteinander verträglich. Da $D(X_i^{p^k+p+k})$, aufgefaßt als Unterraum von $D(W_i)$, die p -te infinitesimale Umgebung von $\{A_i\}$ in $D(W_i)$ umfaßt ([20, Proposition 5.7]); die Glattheitsvoraussetzung ist überflüssig, hat man eine formale Abbildung

$$\varphi_{D(W)}: (D(W_1), \{A_1\}) \dashrightarrow (D(W_2), \{A_2\})$$

definiert. Entsprechendes gilt für $\varphi_{F(X^n, W)} =: \varphi_F$ [20, Proposition 5.8] sowie für $\varphi_{U_{F(X^n, W)}} =: \varphi_{U_F}$, $\varphi_{U_{F(X^n, W)}} =: \varphi_{U_F}$ und φ_U .

Wir wollen nun noch in (*) $D(W_i)$ durch E_i und U_i durch U_{E_i} ersetzen und müssen uns dazu überlegen, daß sich die formalen Isomorphismen $\varphi_{D(W)}$ und φ_U einschränken lassen. Durch Anwendung von Hilfssatz 5.2a) bzw. b) auf das untere bzw. obere Teildiagramm von

$$\begin{array}{ccc} (D(W_1), \{A_1\}) & \xrightarrow{\varphi_{D(W)}} & (D(W_2), \{A_2\}) \\ \uparrow q_1 & & \uparrow q_2 \\ (U_1, \{A_1\} \times A_1) & \xrightarrow{\varphi_U} & (U_2, \{A_2\} \times A_2) \\ \downarrow p_1 & & \downarrow p_2 \\ (W_1, X_1) & \xrightarrow{\varphi} & (W_2, X_2) \end{array}$$

und die Unterräume $X_i \subset W_i$, $p_i^{-1}(X_i) \subset U_i$ und $E_i = q_i(p_i^{-1}(X_i)) \subset D(W_i)$ ergibt sich, daß man $\varphi_{D(W)}$ zu einer formalen Abbildung $\varphi_E: (E_1, \{A_1\}) \dashrightarrow (E_2, \{A_2\})$ einschränken kann. Eine weitere Anwendung von 5.2a) auf das obere Diagramm mit $q_i^{-1}(E_i)$ anstelle von $p_i^{-1}(X_i)$ liefert

$$\varphi_{U_E}: (U_{E_1}, \{A_1\} \times A_1) \dashrightarrow (U_{E_2}, \{A_2\} \times A_2).$$

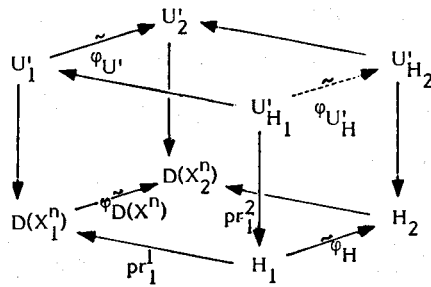
Schließlich ersetzen wir noch die Räume $D(X_i^n)$, $F(X_i^n, W_i)$ und dann E_i durch ihre Reduktionen und schränken die universellen Familien sowie die Morphismen entsprechend ein, behalten aber die alten Notationen bei:

$$(**) \begin{array}{ccccccc} X_i^n & \longleftarrow & U_i & \longleftarrow & U_{F(X_i^n, W_i)} & \xrightarrow{\sim} & U_{F(X_i^n, W_i)} & \longrightarrow & U_{E_i} & \longrightarrow & W_i \\ & & \downarrow & & \searrow & & \swarrow & & \downarrow & & \\ D(X_i^n) & \longleftarrow & & & F(X_i^n, W_i) & \longrightarrow & & & E_i & & \end{array}$$

Erster Konvergenzschritt. Sei Γ_1 eine irreduzible Komponente von $H_1 = H_1(n)$ (siehe 4.7), die $D(A_1) \times \{\underline{A}_1\}$ schneidet. Um einen beliebigen Punkt aus der Schnittmenge läßt sich nach dem Artinschen Approximationssatz [2] die Einschränkung φ_Γ von φ_F durch eine Familie von Keimabbildungen u_ν approximieren. Sei Γ_2 eine irreduzible Komponente von $F(X_2^n, W_2)$, die unendlich viele der $u_\nu(\Gamma_1)$ enthält. Dieselbe Überlegung, auf Γ_2 angewandt, zeigt, daß φ_Γ einen formalen Isomorphismus zwischen Γ_1 und Γ_2 definiert. Die Konvergenz folgt aus [20, Lemma 2.2], denn $\Gamma_1 \rightarrow D(X_1^n)$ ist nach Konstruktion von H_1 fast überall injektiv. Mit H_2 bezeichnen wir das Bild von H_1 in $F(X_2^n, W_2)$ unter dem konvergenten Isomorphismus $\varphi_H := \varphi_{F|_{H_1}}$.

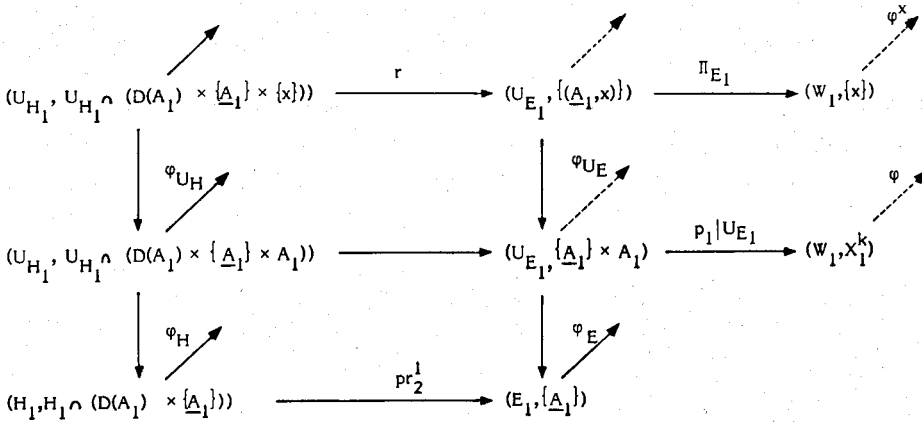
Aus der Konvergenz von $\varphi_H: H_1 \rightarrow H_2$ folgt übrigens mit Lemma 2.5 auch die Konvergenz von $\varphi_E: E_1 \rightarrow E_2$.

Zweiter Konvergenzschritt. Wir ersetzen nun die $F(X_i^n, W_i)$ durch die H_i und U'_{F_i} und U_{F_i} durch die entsprechenden Beschränkungen U'_{H_i} und U_{H_i} ; die eingeschränkten Abbildungen seien φ_H, φ_{U_H} und $\varphi_{U'_H}$. Für die Konvergenz von $\varphi_{U'_H}$ betrachten wir folgenden Ausschnitt aus dem großen kommutativen Diagramm:



Da insbesondere die Rückseite des Diagramms ($i=2$) kartesisch ist, existiert genau eine holomorphe Abbildung $U'_{H_1} \rightarrow U'_{H_2}$, die alles kommutativ macht; sie induziert $\varphi_{U'_H}$. Die Konvergenz von $\varphi_{U'_H}$ – das ist der eigentliche Konvergenzschritt – folgt nun sofort aus [20, Lemma 2.4], in das wesentlich die Eigenschaft (2) aus Satz 4.7 von $H_1 = H_1(n)$ eingeht.

Dritter Konvergenzschritt. Jetzt betrachten wir das kommutative Diagramm



Der untere Teil ist noch aus (**) bekannt, der obere entsteht dadurch, daß man sich bei der Keimbildung auf kleinere Unterräume beschränkt. Der hintere Diagrammteil (für $i=2$ statt 1) ist der Übersichtlichkeit halber nicht eingezeichnet, sondern lediglich die verbindenden Abbildungen φ_E usw.

Zur Konvergenz von $\varphi^x: (W_1, \{x\}) \rightarrow (W_2, \{\varphi(x)\})$ bleibt nach Lemma 2.5 nur noch zu zeigen, daß

$$\Pi := \Pi_E \circ r: (U_{H_1}, U_{H_1} \cap (D(A_1) \times \{A_1\} \times \{x\})) \rightarrow (W_1, \{x\})$$

sub-eigentlich ist. Nach Konstruktion von H_1 ist die Projektion pr_2^1 sub-eigentlich und damit auch

$$r: (U_{H_1}, U_{H_1} \cap (D(A_1) \times \{A_1\} \times \{x\})) \rightarrow (U_{E_1}, \{(A_1, x)\})$$

(s. Bemerkung 1.5.2). Π_{E_1} ist nach Voraussetzung als Keimabbildung surjektiv, also ebenfalls sub-eigentlich (Bemerkung 1.5.3). Deshalb ist auch die Komposition Π sub-eigentlich, was zu zeigen war.

Wir haben noch einen Hilfssatz nachzutragen:

5.2. Hilfssatz. Seien für $i=1, 2$ $p_i: X_i \rightarrow Y_i$ holomorphe Abbildungen komplexer Räume, $A_i \subset X_i$ und $B_i \subset Y_i$ abgeschlossene Unterräume mit $A_i \subset p_i^{-1}(B_i)$, $X'_i \subset X_i$ und $Y'_i \subset Y_i$ weitere Unterräume und $A'_i := X'_i \cap A_i$, $B'_i := Y'_i \cap B_i$. Mit A_i^{∞} bezeichnen wir die formale Umgebung von A_i in X_i und mit B_i^{∞} die formale Umgebung von B_i in Y_i . Sei

$$\begin{array}{ccc} (X_1, A_1) & \xrightarrow{f} & (X_2, A_2) \\ \downarrow p_1 & & \downarrow p_2 \\ (Y_1, B_1) & \xrightarrow{g} & (Y_2, B_2) \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm mit den induzierten Keimabbildungen p_1, p_2 und formalen Isomorphismen f und g . Dann gilt:

- Ist $X'_i = p_i^{-1}(Y'_i)$ ($i=1, 2$), so folgt aus $g(B_1^{\infty}) = B_2^{\infty}$ auch $f(A_1^{\infty}) = A_2^{\infty}$.
- Sind für $i=1, 2$ p_i eigentlich und $p_i(X'_i) = Y'_i$, außerdem B_i kompakt und $A_i = p_i^{-1}(B_i)$, so folgt aus $f(A_1^{\infty}) = A_2^{\infty}$ auch $g(B_1^{\infty}) = B_2^{\infty}$.

Beweis. a) Wir bezeichnen mit A_i^n die n -te infinitesimale Umgebung von A_i in X_i und mit A_i^n die n -te infinitesimale Umgebung von A_i in X_i . Es genügt zu zeigen, daß $f(A_1^n) \subset A_2^n$ gilt. Wegen $A_1^n \subset A_1$ ist $f(A_1^n) \subset A_2^n$, und aus $A_1^n \subset p_1^{-1}(B_1^n)$ folgt

$$f(A_1^n) \subset f(p_1^{-1}(B_1^n)) = p_2^{-1}(g(B_1^n)) = p_2^{-1}(B_2^n) \subset X_2^n.$$

Da $A_2^n = X_2^n \cap A_2^n$ gilt, ist alles gezeigt.

b) Aufgrund von Korollar 2.2 existiert zu jedem n ein $m \geq n$ mit $B_1^m \hookrightarrow p_1(A_1^m)$. Also gilt sowohl

$$g(B_1^m) \hookrightarrow g(p_1(A_1^m)) = p_2(f(A_1^m)) = p_2(A_2^m) \hookrightarrow B_2^m = Y_2' \cap B_2^m$$

als auch $g(B_1^m) \hookrightarrow B_2^m$, somit $g(B_1^m) \hookrightarrow B_2^m$.

Danksagung. Ich danke Herrn Prof. Grauert und Herrn Prof. Hirschowitz für die nette und hilfreiche Betreuung dieser Arbeit.

Literatur

1. Arnol'd, V.I.: Bifurcations of invariant manifolds of differential equations and normal forms in neighborhoods of elliptic curves. *Funct. Anal. Appl.* **10**, 249–259 (1976)
2. Artin, M.: On the solutions of analytic equations. *Invent. Math.* **5**, 277–291 (1968)
3. Atiyah, M.F., Macdonald, I.G.: *Introduction to commutative algebra*. Reading, Mass.: Addison-Wesley 1969
4. Bănică, C., Stănăsilă, O.: *Méthodes algébriques dans la théorie globale des espaces complexes*. Paris: Gauthier-Villars 1977
5. Commichau, M., Grauert, H.: Das formale Prinzip für kompakte komplexe Untermannigfaltigkeiten mit 1-positivem Normalenbündel. In: *Recent developments in several complex variables* (Hrsg. John E. Fornaess), *Annals of Mathematics Studies* 100, 101–126. Princeton: Princeton University Press 1981
6. Douady, A.: Le problème des modules pour les sous-espaces analytiques compacts d'un espace analytique donné. *Ann. Inst. Fourier, Grenoble* **16**, 1–95 (1966)
7. Fischer, G.: *Complex analytic geometry*. *Lect. Notes Math.* 538. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1976
8. Frisch, J.: Points de platitude d'un morphisme d'espaces analytiques complexes. *Invent. Math.* **4**, 118–138 (1967)
9. Gieseke, D.: On two theorems of Griffiths about embeddings with ample normal bundle. *Am. J. Math.* **99**, 1137–1150 (1977)
10. Grauert, H.: Ein Theorem der analytischen Garbentheorie und die Modulräume komplexer Strukturen. *Publ. Math. IHES* **5**, 233–292 (1960)
11. Grauert, H.: Über Modifikationen und exzeptionelle analytische Mengen. *Math. Ann.* **146**, 331–368 (1962)
12. Grauert, H., Remmert, R.: *Theorie der Steinschen Räume*. *Grundlehren* 227. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1977
13. Grauert, H., Remmert, R.: *Coherent analytic sheaves*. *Grundlehren* 265. Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo: Springer 1984
14. Griffiths, Ph.A.: The extension problem in complex analysis II; Embeddings with positive normal bundle. *Amer. J. Math.* **88**, 366–446 (1966)
15. Hartogs, F.: Zur Theorie der analytischen Funktionen mehrerer unabhängigen Veränderlichen, insbesondere über die Darstellung derselben durch Reihen, welche nach Potenzen einer Veränderlichen fortschreiten. *Math. Ann.* **62**, 1–88 (1906)
16. Hartshorne, R.: Cohomological dimension of algebraic varieties. *Ann. Math.* **88**, 403–450 (1968)
17. Hironaka, H.: *Bimeromorphic smoothing of a complex-analytic space*. Preprint, University of Warwick 1971.
18. Hironaka, H.: Flattening theorem in complex-analytic geometry. *Am. J. Math.* **97**, 503–547 (1975)
19. Hironaka, H., Rossi, H.: On the equivalence of imbeddings of exceptional complex spaces. *Math. Ann.* **156**, 313–333 (1964)
20. Hirschowitz, A.: On the convergence of formal equivalence between embeddings. *Ann. Math.* **113**, 501–514 (1981)

21. Kaup, L., Kaup, B.: Holomorphic functions of several variables. De Gruyter studies in math. 3. Berlin, New York: De Gruyter 1983
22. Kiehl, R.: Note zu der Arbeit von J. Frisch: „Points de platitude d'un morphisme d'espaces analytiques complexes“. Invent. Math. **4**, 139–141 (1967)
23. Knorr, K.: Der Grauert'sche Projektionssatz. Invent. Math. **12**, 118–172 (1971)
24. Kosarew, S.: Das formale Prinzip und Modifikationen komplexer Räume. Math. Ann. **256**, 249–254 (1981)
25. Krasnov, V.A.: On the equivalence of embeddings of complex spaces that can be blown down. Math. USSR Izv. **8**, 1009–1032 (1974)
26. Schuster, H.W.: Zur Theorie der Deformationen kompakter komplexer Räume. Invent. Math. **9**, 284–294 (1970)
27. Stoll, W.: About the convergence of a power series. In: Festschrift zur Gedächtnisfeier für Karl Weierstraß, 523–529. Köln, Opladen: Westdeutscher Verlag 1966

Eingegangen am 11. Dezember 1985